

Chapitre 25

Relations de comparaison

Plan du chapitre

1	Domination et négligeabilité (suites)	1
1.1	Définition et exemples	1
1.2	Simplifications avec les petit- o et les grand- O	2
1.3	Opérations avec les petit- o et les grand- O	4
2	Équivalents de suites	4
2.1	Définition et exemples	5
2.2	Simplifications avec les équivalents.	5
2.3	Équivalents usuels en 0 (pour les fonctions)	6
2.4	Composition à droite dans un équivalent de fonctions.	7
2.5	Opérations et équivalents	8
2.6	Autres propriétés des équivalents	10
2.7	Caractère asymptotique des grand- O , les petit- o et les équivalents	11
3	Domination et négligeabilité (fonctions)	12
3.1	Définition et exemples	12
3.2	Récap : grand- O et du petit- o	13
4	Équivalents de fonctions	14
4.1	Définition et exemples	14
4.2	Récap : équivalents $\sim$	15
4.3	Exemples	16
5	Méthodes pour les exercices.	18

Hypothèse

Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Domination et négligeabilité (suites)

1.1 Définition et exemples

Hypothèse

Dans toute cette section, on suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose de plus que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Définition 25.1

- On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
- On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Lorsque $u_n = o(v_n)$, on dit aussi que (v_n) est prépondérante devant (u_n) . Par abus, on dira que le terme général u_n (et non la suite (u_n)) est dominé / négligeable devant le terme général v_n .

Exemple 1. Préciser pour chaque assertion si elle est vraie ou fausse :

1. $\sin n = o(n)$?
2. $n^3 = o(n^2)$?
3. $\frac{1}{n^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$?
4. $e^n = o(e^{n+1})$?
5. $e^n = O(e^{n+1})$?
6. $3n + \sin n = O(n)$?

Théorème 25.2

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est fausse.

Démonstration. Si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. □

Exemple 2. ○ Pour tous réels α et β : $\alpha < \beta \implies n^\alpha = o(n^\beta)$

- Les croissances comparées en $+\infty$ peuvent se réécrire avec un petit- o :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta) \quad n^\alpha = o(e^{\beta n})$$

- (u_n) est une suite bornée si et seulement si $u_n = O(1)$: par exemple $\sin n = O(1)$
- (u_n) tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$: par exemple $\frac{1}{n} = o(1)$

1.2 Simplifications avec les petit- o et les grand- O

Théorème 25.3 – Simplification des constantes non nulles

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$,

$$\lambda u_n = o(\mu v_n) \iff u_n = o(v_n) \quad (\text{idem avec des grand-}O)$$

Démonstration. Le caractère borné de la suite $\left(\frac{\lambda u_n}{\mu v_n}\right)$ ne dépend pas de λ et μ , de même que le fait que cette suite tende vers 0 ou non. □

Exemple 3. $3n = O(n)$

Théorème 25.4 – Simplification des suites négligeables devant une autre

Soit (ε_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\varepsilon_n = o(v_n)$. Alors

$$u_n = o(v_n + \varepsilon_n) \iff u_n = o(v_n) \quad (\text{idem avec des grand-}O)$$

On suppose que $\varepsilon_n = o(u_n)$. Alors :

$$u_n + \varepsilon_n = o(v_n) \iff u_n = o(v_n) \quad (\text{idem avec des grand-}O)$$

Démonstration. Montrons uniquement la première assertion pour les petit- o .

□

Remarque. En d'autres termes, lorsqu'on a une **somme** de plusieurs suites de part et d'autres d'un petit- o ou d'un grand- O , on peut ne garder que la suite qui est prépondérante devant les autres.

Exemple 4. Si $u_n = O(n^2 + \ln n)$, cela revient à dire que $u_n = O(n^2)$.



Étant donné deux suites (a_n) et (b_n) , il n'y a pas toujours une suite qui est négligeable devant l'autre (par exemple $n \neq o(2n)$ et $2n \neq o(n)$), donc on ne peut pas toujours simplifier une somme $a_n + b_n$ dans une relation de comparaison.

Exemple 5. Est-ce que $8n \ln n + \sin n + e^{\arctan n} = O(2n + n \sin n)$?

1.3 Opérations avec les petit- o et les grand- O

Théorème 25.5 – Combinaisons linéaires avec O et o

Soit $(\tilde{u}_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \tilde{u}_n = o(v_n) \end{cases} \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha u_n + \beta \tilde{u}_n = o(v_n)$$

Idem pour des grand- O .

Théorème 25.6 – “Transitivité” de O et o

Soit (w_n) une suite qui vérifie les mêmes hypothèses que (v_n) .

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n = o(w_n) \quad (\text{idem avec les grand-}O)$$

Remarque. La relation O n’est pas “antisymétrique” : par exemple $2n = O(n)$ et $n = O(2n)$. Cependant, on peut définir une autre relation de comparaison Θ par :

$$u_n = \Theta(v_n) \iff \begin{cases} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(u_n) \end{cases}$$

On dit alors que u_n et v_n ont asymptotiquement le même ordre de grandeur : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie qu’il existe des constantes $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour n assez grand : $Cu_n \leq v_n \leq C'u_n$. La relation Θ est une relation d’équivalence sur les suites non nulles à partir d’un certain rang.

Exemple 6. $2n^2 + 3n = \Theta(2n^2) = \Theta(n^2)$.

Remarque. Les relations Θ et O sont très utilisées en algorithmique pour désigner la complexité temporelle d’un algorithme.

Exemple 7. Soit A une matrice réelle de taille n . On cherche la valeur maximale parmi les n^2 coefficients de A . L’algorithme le plus efficace pour le faire a une complexité en $\Theta(n^2)$: cela signifie que si on note $T(n)$ le temps total mis par cet algorithme, alors il existe des constantes $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\text{pour } n \text{ assez grand,} \quad Cn^2 \leq T(n) \leq C'n^2$$

2 Équivalents de suites

Hypothèse

À partir de cette section, toute suite qui se trouve d’un côté ou de l’autre d’un “ $\sim$ ” (cf plus bas) est supposée ne pas s’annuler à partir d’un certain rang (comme (v_n) précédemment).

2.1 Définition et exemples

Définition 25.7

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemple 8. $n^2 + 1 \sim n^2$ car

Théorème 25.8

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.



Ne jamais écrire zéro d'un côté ou de l'autre d'un équivalent : $u_n \sim 0$ et $0 \sim u_n$. En effet ceci sera toujours faux car les suites " $\frac{u_n}{0}$ " ou $\frac{0}{u_n}$ ne peuvent pas tendre vers 1.

Théorème 25.9

Pour tout $\ell \in \mathbb{K}$ **non nul**, on a $u_n \sim \ell \iff u_n \rightarrow \ell$.

Trouver un équivalent simple d'une suite (u_n) c'est trouver une suite (v_n) la plus simple possible qui vérifie $u_n \sim v_n$.

Exemple 9. Trouver un équivalent simple des suites suivantes :

- $\arctan(n^2) \sim \dots$
- $e^{\frac{1}{n}} \sim \dots$
- $\frac{1}{n} \sim \dots$
- $3n^2 - 2n + 4 \sim \dots$ car (si $n \neq 0$)
- $\frac{\ln n}{n+1} \sim \dots$

2.2 Simplifications avec les équivalents

Théorème 25.10

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Démonstration.

□

Corollaire 25.11 – Simplification des suites négligeables devant une autre

Soit (ε_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\varepsilon_n = o(u_n) \iff u_n + \varepsilon_n \sim u_n$$

Démonstration. En posant $v_n = u_n + \varepsilon_n$, par le théorème ci-dessus, on a :

$$u_n + \varepsilon_n \sim u_n \iff v_n \sim u_n \iff v_n - u_n = o(u_n) \iff \varepsilon_n = o(u_n)$$

□

Remarque. Lorsque, d'un côté ou de l'autre d'un équivalent, on a une **somme** de la forme $u_n + \varepsilon_n$ avec ε_n **négligeable** devant (u_n) , on peut “simplifier” par ε_n (comme les petit- o et les grand- O).

Exemple 10. 1. $n + \sin n \sim \dots$

2. $(\ln n)^2 + \sqrt{n} \sim \dots$

3. Pour tous $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ non tous nuls, on a :

$$a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_1 n + a_0 \sim$$

Un polynôme (non nul) en n est donc toujours équivalent à son terme dominant.

2.3 Équivalents usuels en 0 (pour les fonctions)

Les équivalents existent aussi pour des fonctions f , et il nous faut en parler dès maintenant. On anticipe donc un peu en donnant une définition de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ sans préciser les hypothèses sur f, g et a .

Définition non rigoureuse de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. On écrit que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Remarque. On peut écrire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ même si $g(a) = 0$ ou même si f et g ne sont pas définies en a . Dans ce cas on sous-entend que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une limite épointée en a .

Théorème 25.12

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

Démonstration. Comme f est dérivable en a , on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} = f'(a) \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = 1$$

Ainsi, on a bien $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

□

Corollaire 25.13

Démonstration. Les formules des quatre premières lignes découlent directement du Théorème 25.12. Pour la dernière ligne, on ne peut pas l'appliquer car $\cos'(0) = 0$ et $\text{ch}'(0) = 0$, ce qui donnerait 0 à droite de l'équivalent (et donc c'est interdit !). Montrons la formule pour $\cos x - 1$:

□

2.4 Composition à droite dans un équivalent de fonctions**Théorème 25.14 – Composition A DROITE dans un équivalent**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{cases} u_n \rightarrow a \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \end{cases} \implies f(u_n) \sim g(u_n)$$

Cela revient à prendre l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et à “substituer” x par toute suite u_n qui tend vers a .

Exemple 11. On cherche un équivalent simple de $e^{\frac{1}{n}} - 1$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on en déduit par composition à droite que $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Exemple 12. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

- $\sin(e^{-n})$
- $\ln\left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)$
- $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$
- $\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$



Ne jamais composer à gauche dans un équivalent !! Si $u_n \sim v_n$, on ne peut pas en déduire que $f(u_n)$ est équivalent à $f(v_n)$.

Exemple 13. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.

Exemple 14. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ mais $\ln(u_n) \not\sim \ln(v_n)$.

2.5 Opérations et équivalents

Théorème 25.15 – Produit et quotient d'équivalents

Soit a, b, c, d quatre suites à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_n \sim b_n \\ c_n \sim d_n \end{cases} \implies \begin{cases} a_n c_n \sim b_n d_n \\ \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n} \end{cases}$$

Démonstration. Étant donné que $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ et $\frac{c_n}{d_n} \rightarrow 1$, par produit de limites, on a $\frac{a_n c_n}{b_n d_n} \rightarrow 1$, donc $a_n c_n \sim b_n d_n$. $\square$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, en utilisant les équivalents $\lambda \sim \lambda$ et $\frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda}$ on vérifie que :

$$u_n \sim v_n \iff \lambda u_n \sim \lambda v_n$$

Théorème 25.16 – Passage à la puissance dans un équivalent

- Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$u_n \sim v_n \implies u_n^p \sim v_n^p$$

- Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Démonstration. On ne fait la preuve que pour la puissance réelle : soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$



Dans ce théorème, on dirait qu'on a fait une composition à gauche dans $u_n \sim v_n$ par les fonctions $x \mapsto x^p$ ou $x \mapsto x^\alpha$... Et oui c'est permis pour ces deux fonctions. Mais c'est faux en général !

Méthode

Pour trouver un équivalent simple d'une expression avec des **produits, quotients, puissances**, on cherche séparément un équivalent de chaque terme du produit / quotient / sous la puissance, puis on recombine tout à la fin.

Après recombinaison, la recherche d'équivalent est terminée (sauf simplifications évidentes).

Exemple 15. Déterminer un équivalent simple de $\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln(n+1)}{\sqrt{n-1}}$.



Ne jamais additionner des équivalents (ou les soustraire) : si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, on ne peut pas en déduire que $a_n + c_n$ est équivalent à $b_n + d_n$.

Remarque. Pour trouver un équivalent d'une somme $u_n + v_n$, on peut chercher si une des deux suites est négligeable devant l'autre, ou bien faire des réécritures pour faire apparaître des produits ou quotients.

Exemple 16. Trouver un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

2.6 Autres propriétés des équivalents

Théorème 25.17

On suppose que $u_n \sim v_n$.

- Si u_n tend vers une limite ℓ finie ou infinie, alors v_n tend aussi vers ℓ
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $v_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Exemple 17. Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la limite de la suite de terme général $u_n = n^\alpha (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$.

Théorème 25.18

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n & \text{pour } n \text{ assez grand} \\ u_n \sim w_n \end{cases} \implies v_n \sim u_n \sim w_n$$

2.7 Caractère asymptotique des grand- O , les petit- o et les équivalents

Lemme 25.19

Une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang.

Démonstration.

□

Théorème 25.20

Soit (u'_n) et (v'_n) deux suites obtenues en changeant un nombre fini de termes des suites (u_n) et (v_n) respectivement. Alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u'_n \sim v'_n$. Idem avec des petit- o et des grand- O .

Remarque. Les relations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ ne traduisent qu'une propriété **asymptotique** des suites u_n et v_n (via la notion de limite ou de leur caractère borné). Ces relations ne donnent donc aucune information sur les premiers termes de ces suites, ou encore les 10^{10} premiers termes.

3 Domination et négligeabilité (fonctions)

Hypothèse

- D et D' sont des parties de $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme une réunion d'un ou plusieurs intervalles non triviaux, par exemple $D = \mathbb{R}^*$, $D = D_{\tan}$ ou encore $D = [-3, -2] \cup \mathbb{R}_+$.
- a est un point de D ou une extrémité (finie ou infinie) d'un intervalle de D .
- f et g désignent des fonctions définies sur D ou sur $D \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a , i.e.
 - Si $a = +\infty$, alors cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D \cap [M, +\infty[$.
 - Si $a = -\infty$, alors cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D \cap]-\infty, M]$.
 - Si a est fini, alors cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D \cap \left(]a - \varepsilon, a[\cup]a, a + \varepsilon[\right)$.

On notera donc que, si a est fini, la fonction g peut tout à fait s'annuler en a ! L'objectif de cette dernière hypothèse est que le quotient $\frac{1}{g(x)}$ a un sens pour tout $x \neq a$ qui est "assez proche de a ". Il est aussi possible que g ne soit pas définie en a .

3.1 Définition et exemples

Définition 25.21 – Fonction dominée / négligeable selon une autre

On dit que :

- f est dominée par g au voisinage de a , si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note alors :

$$f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f = O_a(g)$$

- f est négligeable devant g au voisinage de a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f = o_a(g)$$

On dit aussi que g est prépondérante devant f .

L'hypothèse que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a est essentielle pour que ces notions aient un sens. Par abus, on confondra souvent f et $f(x)$ et on dira que le réel $f(x)$, et non la fonction f , est négligeable devant / dominée par $g(x)$ au voisinage de a .



Avec les fonctions, les comparaisons avec des petit- o ou des grand- O peuvent avoir lieu en des points a qui ne sont pas $+\infty$... Il faut être très vigilant, notamment en 0...

Exemple 18. $\circ \quad x^2 + 2x = O_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$

$\circ \quad x^2 + 2x = O_{x \rightarrow 0}(2x)$ car

Exemple 19. Préciser pour chaque assertion si elle est vraie ou fausse :

1. $\sqrt{x} = o_{x \rightarrow 0}(x)$?

2. $\ln x = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x}\right)$?

3. $e^x = O_{x \rightarrow 0}(\ln x)$?

4. $\sin x = O_{x \rightarrow a}(1)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$?

Remarque (Rappel). Si une fonction admet une limite *finie* en a , alors cette fonction est bornée au voisinage de a .

Théorème 25.22

Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$. La réciproque est fausse.

Exemple 20. Pour tous réels α et β : $\alpha < \beta \implies \begin{cases} x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta) \\ x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta) \end{cases}$

Les croissances comparées peuvent se réécrire avec un petit- o :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln x)^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\beta x})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{\beta x} = o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad |\ln x|^\alpha = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f = O_a(1)$.

f tend vers 0 en a si et seulement si $f = o_a(1)$.



Malgré le signe égal dans $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, ceci n'exprime pas une égalité mais une limite. Cela signifie que plus x se "rapproche" de a , plus $f(x)$ est "négligeable" devant $g(x)$. En dehors du voisinage de a , cela ne donne aucune information sur f et sur g .

3.2 Récap : grand- O et du petit- o

Les propriétés des grand- O et des petit- o pour les fonctions sont très similaires à celles des suites : il suffit de rajouter un " $x \rightarrow a$ " ou juste un " a " en-dessous. Voici un récap, où on ne les énonce qu'avec un petit- o (mais elles sont identiques avec un grand- O) :

- Simplification des constantes non nulles : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$

$$f = o_a(g) \iff \lambda f = o_a(\mu g)$$

- Combinaison linéaire :

$$\begin{cases} f_1 = o_a(g) \\ f_2 = o_a(g) \end{cases} \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha f_1 + \beta f_2 = o_a(g)$$

- Transitivité :

$$\begin{cases} f = o_a(g) \\ g = o_a(h) \end{cases} \implies f = o_a(h)$$

- Produit (qui servira surtout au prochain chapitre) :

$$\begin{cases} f_1 = o_a(g_1) \\ f_2 = o_a(g_2) \end{cases} \implies f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$$

- Simplification par une fonction (notée ε) négligeable :

- Si $\varepsilon = o_a(g)$, alors : $f = o_a(g + \varepsilon) \iff f = o_a(g)$
- Si $\varepsilon = o_a(f)$, alors : $f + \varepsilon = o_a(g) \iff f = o_a(g)$

4 Équivalents de fonctions

Hypothèse

À partir de cette section, toute fonction qui se trouve d'un côté ou de l'autre d'un “ $\sim$ ” est supposée ne pas s'annuler sur un voisinage épointé de a (comme g précédemment).

4.1 Définition et exemples

Définition 25.23

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$

Théorème 25.24

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a .



Ne jamais écrire zéro d'un côté ou de l'autre d'un équivalent : $f \not\sim_0$ ou $0 \not\sim_f$. En effet ceci sera toujours faux car les fonctions “ $\frac{f}{0}$ ” ou $\frac{0}{f}$ (qui est la fonction nulle) ne peuvent pas tendre vers 1.

Théorème 25.25

Pour tout $\ell \in \mathbb{K}$ **non nul**, on a $f \sim_a \ell \iff \lim_a f = \ell$.

Exemple 21. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes :

- $\text{th} x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \dots\dots$
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \dots\dots$ car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots\dots$ car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots\dots$ car (si $x \neq 0$)
- $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots\dots$ car (si $x \neq 0$) :

Théorème 25.26 – Équivalents d'un polynôme

On cherche un équivalent à l'expression $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

- En $\pm\infty$, $P(x)$ est équivalent à son monôme **non nul** de plus **haut** degré :

$$a_n \neq 0 \implies P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

- En 0, $P(x)$ est équivalent à son monôme **non nul** de plus **bas** degré :

$$\begin{cases} a_0 = \dots = a_{p-1} = 0 \\ a_p \neq 0 \end{cases} \implies P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$$

Démonstration. Évident par opérations sur les limites. □

4.2 Récap : équivalents $\sim$

Les propriétés des équivalents pour les fonctions sont très similaires à celles des suites : il suffit de rajouter un “ $x \rightarrow a$ ” ou juste un “ a ” en-dessous. Voici un récap :

- Équivalents usuels en 0 (cf Corollaire 25.13)
- **Ne jamais composer à gauche dans un équivalent de fonctions !** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, on ne peut pas en déduire que $h(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(g(x))$ avec h une autre fonction.
- On peut cependant composer à droite, typiquement à partir d'un équivalent usuel, cf exemples en section suivante.
- On peut faire le produit ou le quotient de deux équivalents (au même point a), et mettre à la puissance un équivalent
- **Ne jamais additionner des équivalents de fonctions !**

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f admet une limite ℓ finie ou infinie en a , alors g tend aussi vers ℓ en a .
- $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g ont le même signe strict au voisinage de a .
- $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ Si $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et si $f \underset{a}{\sim} h$, alors $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.
- Simplification par une fonction (notée ε) négligeable :

$$\varepsilon(x) = o_{x \rightarrow a}(f(x)) \iff f(x) + \varepsilon(x) \underset{a}{\sim} f(x)$$

ceci se réécrit encore

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$$

4.3 Exemples

Exemple 22. Déterminer un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2 + x}{\sqrt{x}(x - 3e^x)^2}$.

Exemple 23. Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\ln(1+x)}$.

Exemple 24. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\cos \frac{1}{x}\right)$.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer un équivalent simple d'une expression (suite ou fonction), on peut :

1. Si une expression admet une **limite finie non nulle**, elle est équivalente à cette limite.
2. Tout d'abord, essayer des réécritures pour faire apparaître des **produits, quotients, puissances**, puis chercher séparément un équivalent de chaque terme du produit / quotient / sous la puissance, puis tout recombinaison à la fin.
3. Identifier un équivalent de fonction usuel $\left(f(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \dots\right)$ puis faire une **composition à droite** en posant X égal à une expression qui tend vers 0.
4. Si l'expression fait apparaître une **somme**, chercher si un des termes est négligeable devant l'autre.
5. (vu au prochain chapitre) Écrire un DL sous forme normalisée et en déduire un équivalent.

En règle générale, les sommes et les compositions sont les plus délicates à éliminer.